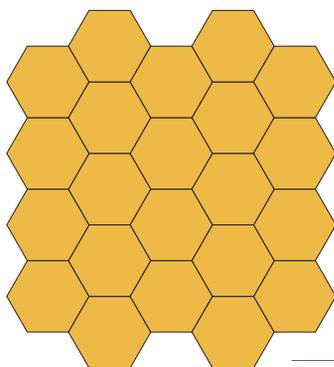
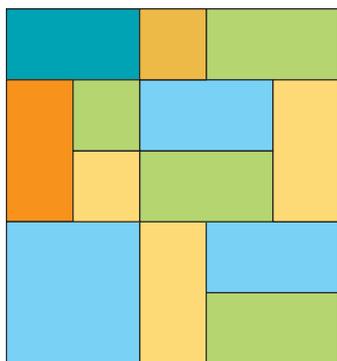


Un premier tour d'horizon

L'idée de pavage est d'ordre pratique. Les routes comme les maisons ont été pavées avant qu'on y voie des mathématiques ! Depuis, la notion a été étendue et, aujourd'hui, on pave même des espaces non euclidiens ou de dimension quatre...

Un exemple de pavage d'un carré par des rectangles.



Pavage du plan avec des hexagones réguliers.

Un pavage du plan est un ensemble de parties, appelées pavés... mais qu'est-ce qu'un pavé ? Si l'on se limite aux pavés que l'on rencontre encore quelquefois dans les rues de nos villes, il s'agit approximativement de rectangles. Un ensemble de pavés pave un domaine du plan si leur réunion est égale à ce domaine et si l'intersection de deux quelconques d'entre eux est incluse dans leur frontière. L'idée se généralise au cas de polygones, convexes ou non, puis de domaines limités par des courbes plus sophistiquées.

Des tomettes dans le plan

En mathématiques, on s'intéresse surtout aux pavages du plan entier.

Les plus simples d'entre eux sont construits avec des pavés égaux, ou isométriques pour être plus précis. Il existe ainsi seulement cinq façons de paver le plan si l'on s'interdit de retourner les pavés. Il faut en ajouter douze autres si l'on se l'autorise. On peut en trouver un bon nombre en visitant l'Alhambra de Grenade. Certains prétendent les y avoir tous vus... ce qui est délicat, vu que de nombreuses pièces sont fermées au public. L'équipe de *Tangente* n'en a trouvé pour sa part qu'une grosse dizaine... Ces pavages sont *périodiques*, c'est-à-dire que l'on peut y trouver un motif de base qui se reproduit à l'infini au moyen d'un groupe d'isométries. Les plus simples d'entre eux sont utilisés dans nos maisons, comme le dallage ci-contre avec des tomettes.

Les artisans persans et arabes sont passés maîtres dans l'art de créer des pavages périodiques originaux, sans doute parce que, comme le judaïsme et le protestantisme dans sa version calviniste, l'islam proscribit la représentation

des êtres humains ainsi que celle des animaux dans les lieux de culte. Les artisans décorateurs ont donc dû se tourner vers d'autres inspirations, les arabesques, les tuiles de Girih et les zelliges en particulier.



Mosaïques dans la mosquée du vendredi à Ispahan.

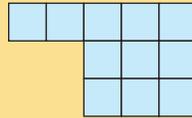
Ces pavages périodiques ont particulièrement intéressé les cristallographes car ils modélisent les arrangements des atomes dans les cristaux (voir *Mathématiques et Chimie*, Bibliothèque Tangente 43, 2012). Jusque dans les années 1960, on pensait que tout jeu fini de pavés pavant le plan pouvait le paver de manière périodique. Cela pouvait sembler simple bon sens, mais Roger Penrose montra que c'était faux en trouvant des structures apériodiques ! La question se retrouve également en cristallographie (voir *Tangente* 173, page 9) et, en ce qui concerne les pavages décoratifs, semble avoir été découverte longtemps avant, comme le montre une mosaïque découverte à Ispahan.

Au-delà du plan

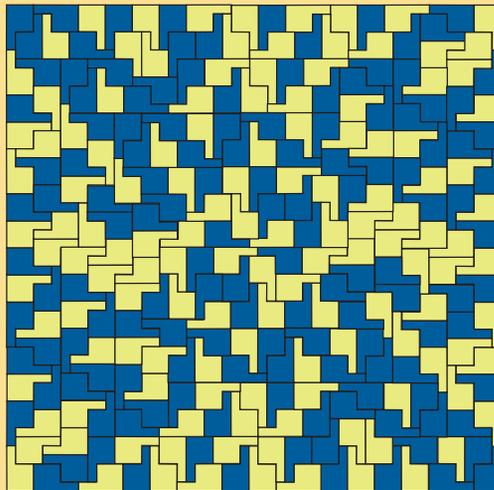
La notion de pavage ne se limite pas au plan euclidien, les définitions se

Un rectangle presque carré à paver...

On se donne un pavé formé d'un carré 3×3 prolongé d'un rectangle 2×1 , de la forme suivante :



Peut-on paver un rectangle « presque carré » (c'est-à-dire de côtés n et $n + 1$) uniquement avec ces pavés ? La réponse est oui... mais il en faut deux cent soixante-dix ! Les côtés du rectangle sont alors égaux à 54 et 55. Voici ce pavage :



Les pavés sont colorés selon qu'ils sont superposables sans les retourner ou non. Ils se répartissent en cent trente-huit pavés d'une couleur et cent trente-deux de l'autre.

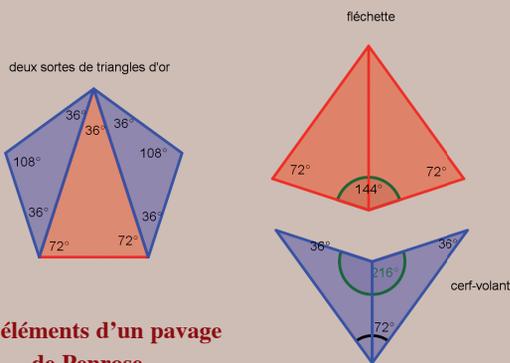
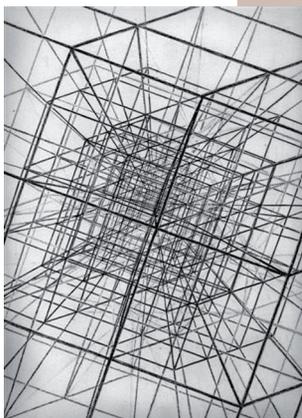
prêtent également aux plans non euclidiens. Cette idée se trouve chez les artistes Maurits Escher et Jos Leys, dont on présente ci-après un pavage du plan hyperbolique (vu, selon le modèle de Poincaré, comme un disque où la notion de distance dépend de l'éloi-

Les pavages de Penrose

Découverts en 1974 par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose, les pavages qui vont porter son nom permettent de réaliser exclusivement un recouvrement du plan, sans trou ni chevauchement, qui soit non périodique, c'est-à-dire qui ne soit pas reproductible par simple translation des motifs. Il existe plusieurs types de tels pavages, les deux plus connus étant, l'un, réalisé avec des « triangles d'or », l'autre avec « cerfs-volants » et « fléchettes ».

Pavage d'hypercubes par Patrice Jeener.

© Patrice Jeener



Les éléments d'un pavage de Penrose.

gnement du centre, comme si la marche des êtres vivant dans ce monde devenait plus difficile et plus lente quand ils s'approchent du bord du disque).

On peut également paver le plan sphérique, ce qui équivaut à paver la sphère. En quittant le plan, on obtient des pavages de l'espace, avec des cubes par exemple mais aussi avec d'autres polyèdres comme des prismes hexagonaux, qui font penser aux orgues basaltiques qu'on trouve dans les régions volcaniques comme l'Auvergne ou l'Islande.



Enfin, si on s'échappe de la dimension trois pour atteindre la dimension quatre ou plus, on obtient des pavages comme celui de l'espace avec des hypercubes, imaginé par Patrice Jeener. Bienvenue dans l'univers esthétique des pavages !

H.L.

Un pavage du plan hyperbolique en hommage à Escher par Jos Leys.

Pour les êtres imaginaires qui vivent à sa surface, tous les pavés sont identiques !